



**International Electronic Journal of
Mathematics Education**

Volume 4, Number 3, October 2009



www.iejme.com

**Sonderheft zum Thema
“Forschung und Entwicklung zur Didaktik der
Wahrscheinlichkeitsrechnung”**

Manfred Borovcnik & Ramesh Kapadia (Hrsg.)

1. Einleitung
2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayes-Theorem
3. Die Perspektive der Schule: Fehlvorstellungen und unvollständige Vorbegriffe
4. Die Perspektive der Lehrenden: Aus- und Fortbildung
5. Die Auswirkungen Moderner Technologien
6. Epilog

Inhalt und Zusammenfassungen in

- [Deutsch](#) 
- [Spanisch](#) 
- [Englisch](#) 




Copyright © 2009 by GOKKUSAGI




ISSN: 1306-3030

1. EINLEITUNG




Manfred Borovcnik & Ramesh Kapadia	Abstract 
Forschung und Entwicklung	Aufsatz 
in der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung	111 – 130



2. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT UND BAYES-THEOREM




Carmen Díaz & Carmen Batanero	Abstract 
Wissen und Fehlvorstellungen beim Schließen mit bedingten	Aufsatz 
Wahrscheinlichkeiten bei Studierenden an der Universität	Annex 
	131 – 162

M. Pedro Huerta	Abstract 
Über die Forschung zum Lösen von Problemen mit bedingten	Aufsatz 
Wahrscheinlichkeiten – Strukturen und Kontexte	Annex 
	163 – 194







3. DIE PERSPEKTIVE DER SCHULE: FEHLVORSTELLUNGEN UND UNVOLLSTÄNDIGE VORBEGRIFFE

Dor Abrahamson	Abstract 
Synthese impliziten und mathematischen Wissens eines Lernenden	Aufsatz 
als Fokus für den Forscher, zwischen Lerntheorien zu vermitteln	Annex 
	195 – 226






Laura Martignon & Stefan Krauss	Abstract 
Enaktive Spiele für Viertklässler: Ein Werkzeugkasten zur	Aufsatz 
Entscheidungsfindung und zum Umgang mit Risiko	227 – 258

Francesca Chiesi & Caterina Primi	Abstract 
“Recency”-Effekte bei Kindern der Primarstufe und	Aufsatz 
bei Studierenden am College	Annex 
	259 – 274



4. DIE PERSPEKTIVE DER LEHRENDEN: AUS- UND FORTBILDUNG

- Hugo M. Hernández Trevethan, Verônica Y. Kataoka, & M. da Silva Oliveira [Abstract](#) 
**Ein praktischer Ansatz zur Wahrscheinlichkeit
im Kontext einer Wissenschaftsmesse** [Aufsatz](#) 
[Annex](#) 
275 – 290
- Ödön Vancsó [Abstract](#) 
**Klassischer und Bayesianischer Weg – parallel diskutiert –
zur Einführung in die statistische Inferenz** [Aufsatz](#) 
[Annex](#) 
291 – 322

5. DIE AUSWIRKUNGEN MODERNER TECHNOLOGIEN

- Dave Pratt & Ramesh Kapadia [Abstract](#) 
Formen von Erfahrungen junger und naiver ‘Probabilisten’ [Aufsatz](#) 
323 – 338
- Seth Ireland & Jane Watson [Abstract](#) 
**Eine Verbindung zwischen experimentellen und
theoretischen Aspekten von Wahrscheinlichkeit aufbauen** [Aufsatz](#) 
[Annex](#) 
339 – 370

6. EPILOG

- Ramesh Kapadia [Abstract](#) 
Chance Encounters – 20 Jahre danach [Aufsatz](#) 
**Fundamentale Ideen zum Unterrichten von Wahrscheinlichkeit
auf Schulniveau** 371 – 386

1. EINLEITUNG

Forschung und Entwicklung in der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung

[Top](#) 

Manfred Borovcnik & Ramesh Kapadia

ZUSAMMENFASSUNG. In der Arbeitsgruppe zum Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung an der ICME 11 wurde eine Reihe von Ideen vorgestellt. Einige der Aufsätze wurden unter den motivierenden Leitgedanken der Interaktivität und dem Ausnutzen der Möglichkeiten einer elektronischen Veröffentlichung weiter entwickelt. Wie dies häufig der Fall ist, beeinflussen die Methoden der Forschung die Ergebnisse und so änderten die Forschungen – gar nicht so überraschend – in diesem Prozess ihren Charakter. Dieser Aufsatz bietet eine Zusammenfassung sowohl über die großen Leitthemen der Forschung in der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung weltweit als auch über das Ergebnis dieses Experiments in elektronischer Kommunikation. Für die internationale Leserschaft wurden auch Zusammenfassungen in Spanisch und Deutsch bereit gestellt; einige Hinweise sollen helfen, zwischen den Artikeln und den angeschlossenen Materialien bequem zu „navigieren“.

SCHLÜSSELWÖRTER. Forschung, Didaktik der Wahrscheinlichkeit, ICME 11, elektronisches Publizieren, Interaktivität.

[Aufsatz](#) 

2. BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT UND BAYES-THEOREM

Wissen und Fehlvorstellungen beim Schließen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten bei Studierenden an der Universität

[Top](#) 

Carmen Díaz & Carmen Batanero

ZUSAMMENFASSUNG. Die Forschungsfrage in dieser Studie war, mögliche Beziehungen zwischen formalen Kenntnissen von bedingter Wahrscheinlichkeit und Fehlvorstellungen beim Schließen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu beurteilen: Die Fehlvorstellung von der umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeit; die Fehlvorstellung von der Bindung an den zeitlichen Verlauf; Fehlvorstellungen über die Prävalenz (Basishäufigkeiten) in synchronen und diachronen Situationen; Fehlvorstellungen über die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens von Ereignissen; Verwechseln von Unabhängigkeit und wechselweiser Unvereinbarkeit. Der CPR-Test wurde zwei Gruppen von Universitätsstudenten vor ($n = 177$) bzw. nach ($n = 206$) einer formalen Unterweisung in bedingter Wahrscheinlichkeit vorgelegt. Die Studierenden befanden sich im Masterstudium des Faches Psychologie. Die Ergebnisse zeigen eine systematische Verbesserung im formalen Verständnis von bedingter Wahrscheinlichkeit und in der Problemlösefähigkeit an; allerdings gibt es kaum positive Veränderungen hinsichtlich der angeführten psychologischen Fehlvorstellungen zum Begriff.

SCHLÜSSELWÖRTER. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Fehlvorstellungen, Unterweisung.

[Aufsatz](#) 

Über die Forschung zum Lösen von Problemen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

– Strukturen und Kontexte

[Top](#) 

M. Pedro Huerta

ZUSAMMENFASSUNG. In diesem Aufsatz geben wir einen Überblick über unsere jüngeren Forschungen zum Problemlösen im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wir untersuchen eine spezielle Welt von schulischen Wortproblemen, die wir ternäre Probleme bedingter Wahrscheinlichkeit nennen. Mit Hilfe eines mathematischen Objekts, dem Tri-Graphen, und der Methode von Analyse und Synthese bauen wir eine Rahmentheorie auf, die zur strukturellen, didaktischen und phänomenologischen Analyse von ternären Problemen mit bedingter Wahrscheinlichkeit dienen soll. Demgemäß haben wir diese Welt in verschiedene Typen von Problemen unterteilt. Im Hinblick auf das Problemlöseverhalten von Studierenden identifizieren wir vier Typen von Denkprozessen, die mit dem Format und dem Gebrauch der Daten des Problems zu tun haben. Wir illustrieren unseren Ansatz an der Situation diagnostischer Tests im speziellen Kontext der Medizin.

Hauptzweck unserer Arbeiten ist es, das Verständnis von Lernenden der Sekundarstufe für bedingte Wahrscheinlichkeit zu verbessern; wir schlagen dazu einen Zugang vor, der problemorientiert ist und sich an bestimmten Kontexten ausrichtet. Wir glauben, dass der Ansatz, den wir in diesem Aufsatz präsentieren, Lehrenden und Forschenden in dieser Hinsicht helfen kann

SCHLÜSSELWÖRTER. Bedingte Wahrscheinlichkeit, Problemlösen.

[Aufsatz](#) 

3. DIE PERSPEKTIVE DER SCHULE: FEHLVORSTELLUNGEN UND UNVOLLSTÄNDIGE VORBEGRIFFE

Synthese impliziten und mathematischen Wissens eines Lernenden als Fokus für den Forscher, zwischen Lerntheorien zu vermitteln

[Top](#) 

Dor Abrahamson

ZUSAMMENFASSUNG. Welche Unterrichtsmaterialien und Praktiken können dazu beitragen, dass Lernende den Wahrscheinlichkeitsbegriff sinnvoll auffassen? Li (11 Jahre) nahm an einem interview-basierten Unterrichtsexperiment zur Binomialverteilung teil. Das Design war an einem innovativen, urrenähnlichen Zufallsgenerator ausgerichtet und sollte Gelegenheit bieten, zwei verschiedene mentale Konstruktionen der Erwartung der Verteilung der Ergebnisse miteinander in Einklang zu bringen: (a) Ganzheitliche Urteile, die sich auf stillschweigendes Wissen über Zusammenhänge zwischen Grundgesamtheit und Stichproben gründen und implizit in Begriffe von zusammengefassten Ereignissen eingebettet sind, welche keinerlei Bezug auf Permutationen dieser Möglichkeiten Bezug nehmen; (b) analytische Verwendung des Verhältnisses von günstigen und möglichen Elementarereignissen im Sinne klassischer Wahrscheinlichkeit mit Bezug auf Permutationen. Wir belegen, dass konstruktivistische und sozio-kulturelle Sichtweisen von Mathematiklernen miteinander versöhnt werden können, indem man Interaktionen zwischen intuitiven und formalen Ressourcen individueller Entwicklung tieferen begrifflichen Verständnisses aufdeckt. Lernen ist ein angeleiteter Prozess des Vermischens zweier Konstruktionen problematisierter Situationen: dem vom Phänomen her Unmittelbaren und dem semiotisch Übertragenen.

SCHLAGWÖRTER. Design-basierte Forschung, Kognitionswissenschaft, sozio-kulturelle Lerntheorie, kulturelle Semiotik, Binomialexperiment, kombinatorische Analyse, Stichprobenraum.

[Aufsatz](#) 

Enaktive Spiele für Viertklässler: Ein Werkzeugkasten zur Entscheidungsfindung und zum Umgang mit Risiko

[Top](#) 

Laura Martignon & Stefan Krauss

ZUSAMMENFASSUNG. Ziel dieses Artikels ist es zu zeigen, wie man Kinder mit einem Werkzeugkasten aus ersten, einfachen Instrumenten unterstützen kann, Schlüsse unter Unsicherheit geeignet zu treffen und mit Risiken umgehen zu lernen. Kinder, wie wir meinen, können diese Werkzeuge durch ein Mosaik elementarer spielerischer Aktivitäten erwerben, die sie mit Eigenheiten von Ungewissheit und Unsicherheit vertraut machen sollen. Wir stellen eine Kette von Aufgaben vor, die aufeinander aufbauen. Wir beginnen mit der Selektionsaufgabe von Wason, wechseln zu Plastikbausteinen und führen die Kinder so in stochastische und Bayesianische Aufgaben ein und unterstützen sie bei Vergleichen von Proportionen, die für die Einschätzung von Wahrscheinlichkeiten und letztlich auch Risiken unerlässlich sind. Diese Unterrichtsexperimente wurden von neueren empirischen Forschungsergebnissen über menschliche Entscheidungsfindung im medizinischen und im finanziellen Bereich inspiriert und geleitet.

SCHLAGWÖRTER. Arbeitshilfen, Plastikklötze (Tinker Cubes), Bayesianisches Schließen, Wason-Experiment, Risiko.

[Aufsatz](#) 

“Recency”-Effekte bei Kindern der Primarstufe und bei Studierenden am College [Top](#)

Francesca Chiesi & Caterina Primi

ZUSAMMENFASSUNG. Wir untersuchen die zeitliche Entwicklung von Wahrscheinlichkeitsschlüssen und damit zusammenhängenden Fehlvorstellungen wie dem negativen und positiven „Rezenz“-Effekt. Primarstufenkinder und Studierende am College werden mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben konfrontiert, in denen sie nach der Wahrscheinlichkeit gefragt werden, mit der das nächste Ereignis eintritt, wenn man eine Serie von unabhängigen Wiederholungen des Experiments kennt. Die Ergebnisse zeigen, dass ältere Kinder besser abschneiden als jüngere, aber auch besser als erwachsene Studierende. Hinsichtlich der Fehlvorstellungen halten wir fest, dass die positive Rezenz mit dem Alter abnimmt, wohingegen wir für die negative Rezenz keinen Zusammenhang mit dem Alter gefunden haben. Theoretische und unterrichtliche Folgerungen aus den Ergebnissen werden diskutiert.

SCHLÜSSELWÖRTER. Wahrscheinlichkeitsschlüsse, “Rezenz”-Effekte, Primarstufenkinder, Universitätsstudierende.

[Aufsatz](#) 

4. DIE PERSPEKTIVE DER LEHRENDEN: AUS- UND FORTBILDUNG

Ein praktischer Ansatz zur Wahrscheinlichkeit im Kontext einer Wissenschaftsmesse

Hugo M. Hernández Trevethan, Verônica Y. Kataoka, & Marcelo da Silva Oliveira

[Top](#) 

ZUSAMMENFASSUNG. In einer Gesellschaft, die immer schneller Information erzeugt, müssen sich Schulen mit viel Einfallsreichtum ihren Aufgaben widmen. Außerschulische Aktivitäten mögen hier hilfreich sein für Studierende, damit sie sich ein breiteres Wissen aneignen als dies im Klassenverband möglich ist. Zum anderen ist Zufall praktisch allgegenwärtig und beeinflusst nahezu alle täglichen Entscheidungen hauptsächlich durch unseren Wissensstand. Es ist daher von großer Bedeutung, zumindest eine ungefähre Vorstellung davon zu entwickeln, wie einzelne Ereignisse die Wahrscheinlichkeit für andere Ereignisse ändern können. Wir spielen beide Ideen im Kontext einer Wissenschaftsmesse durch. Dabei haben zwei Studierende der oberen Sekundarstufe ein Projekt zu bedingter Wahrscheinlichkeit durchgeführt, das sich mit dem Spiel „Shut the box“ befasste. Wir möchten es auch als Forschungsfrage verstanden wissen, ob diese Studierenden durch die Teilnahme an der Wissenschaftsmesse im Vergleich zu ihren Klassenkameraden ein höheres Niveau hinsichtlich des Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten erreicht haben oder ob sie Kenntnisse erworben haben, die weit über jene Konzepte hinausgehen, die im offiziellen Curriculum enthalten sind.

SCHLÜSSELWÖRTER. Wissenschaftsmesse, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bayes-Theorem, außer-curriculare Tätigkeiten, Projektbasierter Unterricht, Persönlichkeitsentwicklung.

[Aufsatz](#) 

Klassischer und Bayesianischer Weg – parallel diskutiert – zur Einführung in die statistische Inferenz

[Top](#) 

Ödön Vancsó

ZUSAMMENFASSUNG. Zweck dieser Arbeit ist es, über die Konzeption und einige Ergebnisse eines langfristigen Ausbildungsprojekts in Budapest zu berichten. Die Studie basiert auf einer innovativen Idee von Unterricht, welche sich auf eine parallele Einführung von klassischen und Bayesianischen Methoden der statistischen Inferenz stützt. Unsere Forschung ist durch folgende Fragen gekennzeichnet: Verstehen Studierende den Begriff Wahrscheinlichkeit und statistische Methoden besser, wenn man sich den ganzen Lehrgang hindurch sowohl auf subjektive als auch objektive Interpretationen von Wahrscheinlichkeit bezieht? Verstehen Studierende klassische statistische Beurteilung besser, wenn sie gleichzeitig Bayesianische Methoden lernen? Während die Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie über Jahre hinweg gemieden wurden, beginnen die Studierenden langsam, das „parallele“ Design anzunehmen. Es gibt ausreichend Belege, dass die Studierenden auf diese Weise die Begriffe besser verstehen. Die Ergebnisse stützen auch die These, wonach Ansichten und festgefahrene Meinungen der Studierenden über Mathematik ihre spätere Arbeit als Mathematiklehrende an Schulen entscheidend beeinflussen. Schließlich integriert das Design der Vorlesungen auch Reflexionen über philosophische Probleme, was ein breiteres Bild über Moderne Mathematik und ihre Anwendungen zur Folge hat.

SCHLÜSSELWÖRTER. Bayes-Statistik, die Begünstigen-Relation, Statistische Inferenz, Konfidenzintervalle, Bayesianische Regionen höchster Dichte (RHD).

[Aufsatz](#) 

5. DIE AUSWIRKUNGEN MODERNER TECHNOLOGIEN

Formen von Erfahrungen junger und naiver ‘Probabilisten’

[Top](#) 

Dave Pratt & Ramesh Kapadia

ZUSAMMENFASSUNG. Dieser Aufsatz beurteilt eingangs die Mängel eines Unterrichts in Statistik und fasst dann Forschung zusammen, die sich mit Fehlvorstellungen über Wahrscheinlichkeit von Lernenden auseinandergesetzt hat. Vorausgegangene Forschung widmete sich der Frage, was Lernende im Alter von 11-12 Jahren wissen und konstruieren können, wenn sie Zugang zu sorgfältig aufgebauten Lernumgebungen bekommen. Diese Lernenden beurteilten Zufall nach seiner Unvorsehbarkeit, nach seinem Mangel an Mustern in den Ergebnissen, nach dem Mangel an Kontrolle über den Ausgang sowie dessen Fairness, wie dies auch Experten tun würden. Es war jedoch nur durch sorgfältige Interaktion mit der virtuellen Umgebung, ChanceMaker, zu erreichen, dass die jungen Menschen begannen, situative Bedeutungen für langfristiges Verhalten von Zufall auszudrücken. Diese Daten werden dann re-analysiert, um so über die Entscheidungen zum Design solcher Lernumgebungen zu reflektieren. Vier wichtige Design-Heuristiken werden identifiziert und ausgearbeitet: Testen persönlicher Vermutungen, Aufbauen auf dem Vorwissen der Lernenden, Verbinden von Zweck und Nutzen, Kombinieren von Kontrolle und Repräsentation. Es wird die These aufgestellt, dass diese Heuristiken von allgemeinerer Relevanz für Lehrende an Schule und Universität sind, sofern sie diese anstreben, die Erfahrungen von jungen und naiven „Probabilisten“ bewusst durch ihre Aktionen als Entwickler von Aufgaben und Lernumgebungen zu gestalten.

SCHLAGWÖRTER. ChanceMaker, Design, Technologien, Micro-Welten.

[Aufsatz](#) 

Eine Verbindung zwischen experimentellen und theoretischen Aspekten von Wahrscheinlichkeit aufbauen

Seth Ireland & Jane Watson

[Top](#) 

ZUSAMMENFASSUNG. Dieser Aufsatz greift eine Frage auf, die Graham Jones gestellt hat: Welcher Art sind die Verbindungen zwischen klassischer und frequentistischer Auffassung von Wahrscheinlichkeit, die Lernende in den mittleren Jahren ihrer Schullaufbahn aufbauen? Wir greifen diese Frage anhand der Analyse zweier erweiterter Unterrichtseinheiten in der Stufe 5/6 auf, an welche sich Tiefeninterviews mit acht Studierenden anschlossen. Wir benutzten TinkerPlots in der Modell 1-Version in beiden Umgebungen, um größer werdende Stichproben von zufälligen Ereignissen zu simulieren. Ziel war es, das Verständnis der Lernenden zu dokumentieren, und zwar auf einer kontinuierlichen Skala zwischen experimentellen bis hin zu theoretischen Aspekten; wir schlossen in unsere Überlegungen auch die Interaktion zwischen den Zufallsgeneratoren, dem Simulator und dem Gesetz der großen Zahlen mit ein. Ein kognitives Entwicklungsmodell diente dazu, das Verständnis der Studierenden zu beurteilen; Empfehlungen für unterrichtliche Interventionen werden gegeben.

SCHLÜSSELWÖRTER. Experimentelle Schätzung von Wahrscheinlichkeiten, theoretische Wahrscheinlichkeit, Simulation, Gesetz der großen Zahlen, *TinkerPlots*.

[Aufsatz](#) 

6. EPILOG

Chance Encounters – 20 Jahre danach

Fundamentale Ideen zum Unterrichten von Wahrscheinlichkeit auf Schulniveau

[Top](#) 

Ramesh Kapadia

ZUSAMMENFASSUNG. Dieser Aufsatz befasst sich mit der Frage, wie Wahrscheinlichkeit heute in England unterrichtet wird und in welcher Form das Curriculum Schlüsselideen in der Forschung der letzten Jahrzehnte widerspiegelt. Anknüpfungspunkte zu Forschung in der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden gesucht; es wird der Frage nachgegangen, inwieweit die Herausforderungen, die im Buch „Chance Encounters“ am Schluss der Betrachtungen gestanden sind, aufgenommen wurden. Die Ausführungen stützen sich auf das gegenwärtige Curriculum und auf die Leistung der Kinder in Tests. Die entscheidende Frage ist, in welchem Ausmaß sich der Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung über die letzten zwanzig Jahre hinweg geändert hat. Die Schlussfolgerung ist, dass man sich bemüht, die Kinder gut in Wahrscheinlichkeit auszubilden.

SCHLAGWÖRTER. Wahrscheinlichkeit, Sekundarstufe, Unterricht.

[Aufsatz](#) 